

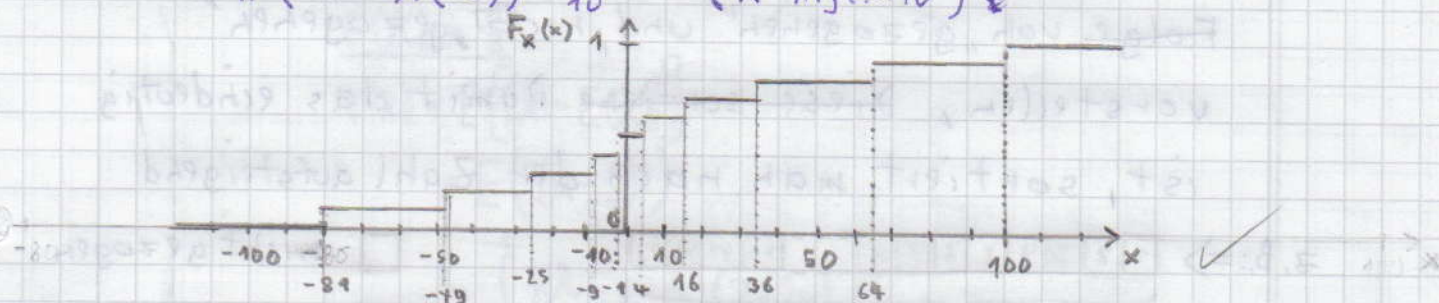
1	2	3	4	Σ
4	4	4	4	16/16

$$1. \Omega = \{1, \dots, 10\}$$

$$X(\Omega) = \{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\} = \{-1, 4, -9, 16, -25, 36, -49, 64, -81, 100\}$$

$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{10} \quad \forall \omega \in \Omega \text{ (Gleichverteilung)}$$

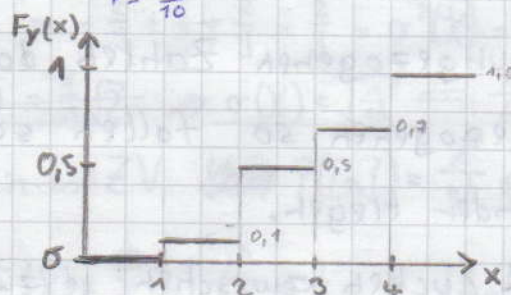
$$\Rightarrow P(X = X(\omega)) = \frac{1}{10} \quad (X \text{ injektiv})$$



$$Y((1, 2, 3, \dots, 10)) = (1, 2, 2, 3, 2, 4, 2, 4, 3, 4)$$

$$\Rightarrow Y(1) = 1, \quad Y(\{2, 3, 5, 7\}) = 2, \quad P = \frac{4}{10}$$

$$Y(\{4, 9\}) = 3, \quad Y(\{6, 8, 10\}) = 4, \quad P = \frac{3}{10}$$



✓ 4/4

4**

Mögliche Ziehungen gesamt: $\binom{49}{6}$

(außer es handelt sich um ein anderes
(nicht deutsches Lotto); Dann ersetzt man
alle „49“ durch „n“ und „6“ durch k,
dann gilt es auch allgemein)

Solch eine Ziehung kann ich mir als Abfolge
Folge von „gezogen“ und „nicht gezogen“
vorstellen. ~~Diese sortiere~~ Damit das eindeutig
ist, sortiert man nach der Zahl aufsteigend

z.B.: $\Rightarrow$

1	2	3	4	5	6	7	8	...	46	47	48	49
---	---	---	---	---	---	---	---	-----	----	----	----	----

49

☐ nicht gezogen
☒ gezogen

Statt $P(\text{„mindestens ein Zahlenpaar“}) =: P(A)$

betrachte ich $P(\text{„kein Zahlenpaar“}) = 1 - P(A)$. ✓

Dieses ^{Fälle lassen} ~~Problem~~ lässt sich nun als Reihe von
 $49 - 6 = 43$ ungezogenen Zahlen darstellen, in
die die 6 gezogenen so fallen sollen, dass nie
2 nebeneinander liegen. ✓

$\Rightarrow$ Es gibt 42 Lücken zwischen je zwei ungezogenen,
sowie je eine Lücke am Anfang und Ende.

						...				
--	--	--	--	--	--	-----	--	--	--	--

42 + 2 = 44 Lücken

$\Rightarrow$ Problem ist einfach
„Ziehen“ von Lücken ohne

zurücklegen (denn würden 2 gezogene an der gleichen
Stelle eingefügt, ~~wäre~~ bildeten sie wieder ein Paar)

$\Rightarrow \binom{44}{6}$ Möglichkeiten ohne Zahlenpaare:

$$\Rightarrow P(A) = 1 - \frac{\binom{44}{6}}{\binom{49}{6}} = 1 - \frac{5082517440}{10068347520} \approx 0,4952 \quad \checkmark$$

$\binom{49}{6} = 13.983.816$ das für Zahlen? $\frac{4}{4} \Rightarrow$ W'keit, dass ein
Zahlenpaar auftritt,
ist 49,5%.

2) a) $[0, 1]$ mit Dichte $f(x) = 2 - 2x$, ZV $X(x) = x$

$$E(X) = \int_a^b X(x) \cdot f(x) dx$$

$$E(X) = \int_0^1 2x - 2x^2 dx$$

$$= \left[x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3}$$

$$E(X) = \frac{1}{3}$$

$$V(X) = E\left[(X - E(X))^2\right]$$

$$= E\left(\left(x - \frac{1}{3}\right)^2\right)$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right)(2 - 2x) dx$$

$$= \int_0^1 2x^2 - 2x^3 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}x^2 + \frac{2}{9} - \frac{2}{9}x dx$$

$$= \int_0^1 -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{2}{9} dx = \int_0^1 -2x^3 + \frac{10}{3}x^2 - \frac{14}{9}x + \frac{2}{9} dx$$

$$= \left[-\frac{2}{9}x^3 + \frac{4}{3}x^2 + \frac{2}{9}x \right]_0^1 = \left[-\frac{2}{9}x^4 + \frac{10}{9}x^3 - \frac{7}{9}x^2 + \frac{2}{9}x \right]_0^1$$

$$= -\frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{2}{9} = \sigma^2(X) = \frac{1}{18} = \sigma^2(X)$$

$$\Rightarrow \sigma(X) = \frac{1}{3}\sqrt{2} \Rightarrow \sigma(X) = \sqrt{\frac{1}{18}} = \frac{1}{6}\sqrt{2}$$

b) $X(n) = n$ ist ZV, $P\{X=n\} = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$ (Poisson-Vert.)

$$E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = \lambda \text{ (bekannt)}$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} n^2 \cdot \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \right) - \lambda^2$$

$$[n^2 = n^2 - n + n = n(n-1) + n]$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n(n-1) + n) \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \right) - \lambda^2$$

$$= \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}}_{1. \text{ Summand} = 0} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} n \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}}_{2. \text{ Summand} = \lambda} - \lambda^2$$

auseinanderziehen mgl., weil alle Summanden ≥ 0

1. Summand = 0

2. Summand = λ



$$\begin{aligned}
 V(X) &= \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\lambda^n}{(n-2)!} e^{-\lambda} \right) + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda} \right) - \lambda^2 \quad \checkmark \\
 &= \lambda^2 e^{-\lambda} \cdot \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!}}_{e^{\lambda}} + \lambda e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}}_{e^{\lambda}} - \lambda^2 \\
 &= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2
 \end{aligned}$$

$$V(X) = \lambda \quad \checkmark$$

4/4

3) a)

$$P_X(\tau) = 1 - 9,462\% = \cancel{90,538\%} \quad 90,538\%$$

→ W. für Geburtstage von τ Personen an verschiedenen Tagen

Dafür nutze Formel aus dem Skript (S. 59):

$$P_X(\tau) = 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{\tau-1}{n}\right) \quad \text{mit } n=365$$

Löst sich (z.B. in Matlab) ausrechnen

```

[
    u = 100;
    for tau = 1:8; % hier variieren
        u = u * (1 - tau/365);
    end
    u
]

```

$$\Rightarrow u = 90,5376 \quad \checkmark$$

Der Wert „8“ ist aber noch nicht das gesuchte τ , da im letzten Faktor $\tau-1$ steht. Also

$$\tau = 9 \quad \text{Leute nehmen am Seminar teil.} \quad \checkmark$$

b) Wieder wie im Skript (S. 59) mit:

$$n=10 \text{ (Ziffern } 0, \dots, 9) \quad \tau=4 \text{ (Anzahl Ziffern)}$$

$$P_X(4) = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{10 \cdot 10^3} = 50,4\% \quad \text{(alle verschieden)} \quad \checkmark$$

Also ist die Wahrscheinlichkeit für Übereinstimmung 49,6%.

4/4